



TITLE:

液膜のパターン形成 (臨界現象と微分方程式の解の分岐)

AUTHOR(S):

村上, 洋一; 飯田, 和雄

CITATION:

村上, 洋一 ...[et al]. 液膜のパターン形成 (臨界現象と微分方程式の解の分岐). 数理解析研究所講究録 2001, 1231: 83-106

ISSUE DATE:

2001-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41473>

RIGHT:

液膜のパターン形成

阪府大工 村上洋一 (Youichi Murakami)

シーディーアダプコ 飯田和雄 (Kazuo Iida)

1 はじめに

自由境界をもつ液膜が絡む問題は工学や自然界に多く存在する。例えば、工学においては、壁面を熱から保護するために薄い空気の層を流すことが行われている。これは胃酸から胃壁を守るために粘膜からある種の液体が分泌されていることと似ている。まぶたの開閉も眼球に薄い涙の膜があるおかげである。このように摩擦の低減に利用されることもある。核沸騰から膜沸騰への遷移の予測は熱工学の重要な課題である。斜面を下る液膜流はありふれた現象であるのみならず、溶岩流の予測は自然災害を未然に防ぐこととも関連している。他の地学、生物物理や化学の応用例については、Oron *et al.* [1] にまとめてある。さまざまな問題に液膜は関連しているので、流体力学の一分野として液膜の運動をとりあげることは、各分野の基盤的知識を高めることにつながると考えられる。一様な液膜の状態が不安定性によりどのようなパターンが生じるかを明らかにすることが主な課題となる。

ここでは非常に薄い液膜を考えているので、壁面での粘性の効果が非常に大きいので非粘性を仮定することはできない。すなわち、保存系ではなく散逸系に属する。斜面を下る液膜流のように流れのある開いた系とレイリー・テイラー不安定性のように流れのない系の2種類ある。保存系の場合は、1次元的に局在する孤立波はよく観察されるが、2次元的に局在する孤立波はあまり観察されない。一方、散逸系の場合は2次元的に局在した構造が観察されることが多い。斜面を下る流れにおける馬蹄形の波 [2]、レイリー・テイラー不安定性における液滴 [3] や散逸の強い場合のファラデー波における「指」に似た構造の波 [4] などがその例である。このように本質的に3次元の流れ場とその2次元表面変形を取り扱う必要がある点が散逸波動の1つの特徴であろう。

液膜は非常に薄いことが多く表面も変形するので、流体のバルクの運動を計測することは困難である。したがって、計算機シミュレーションの技術を確立することが重要になる。シミュレーションをするためには、現象に対するモデルやそれを記述する方程式系が必要になる。通常、非圧縮のナビエ・ストークス方程式が基礎となりそれにさまざまな効果を付加し適切な境界条件を与えれば、現象を記述することができる。しかし、このような流体の基礎方程式を表面変形を考慮して数値的に解くことは原理的には可能であるが、非常に時間がかかる。例えば、臨界値を求めるような問題では2次元計算でも莫大な時間がかかる ([5])。また、3次元計算で広範囲のパラメータ計算することは、強力な並列計算をしない限り不可能であろう。別の方法として流体層が薄いという点を考慮して、基礎方程式を簡略化することが考えられる。このような近似をすることで表面変形 $h = h(x, y, t)$ のみの方程式を導出してそれを数値的に解くことが考えられる。このとき、方程式に含まれる表面張力を表す項が $\nabla \cdot \nabla(h^3 \nabla^2 h)$ のように非線形かつ減衰を表す高階微分になる。

このような場合、方程式を時間について陽的に解くと時間刻み Δt を非常に小さくとる必要がある。したがって、単純な陽解法を採用する代わりに陰解法を用いることが多い。高階の非線形項であるので、単純に陰解法を用いると空間分割点の自由度をもつ連立非線形方程式を毎時間ステップ解く必要が出てくる。これも実用的な方法ではない。通常は陰解法を工夫して解いているが、2次元の数値シミュレーションはごく最近になって行われるようになった。例えば、Sharma and Khanna[6] は、ファン・デル・ワールス力を考慮した場合について 30×30 および 60×60 の分割数の数値シミュレーションをギアの方法を用いて行っている。Oron[7] はマランゴニ効果のある場合について 51×51 および 81×81 の分割数を用いてシミュレーションしている。このように、あまり大きなサイズの数値シミュレーションは行われていない。局在構造の空間分布を議論するような場合はより大きなシステムサイズの系を扱うことが望ましい。このように大きな系をシミュレーションする方法を開発する必要がある。

この研究では、近似によって得られた2次元の長波長方程式を比較的大きなシステムサイズ (128×128) について数値的に解いた結果について報告する。液膜について長波長方程式や近似方程式のシミュレーションの研究は多い。しかし、1次元の場合については直接数値シミュレーションとの比較もなされているが、重要となる2次元の場合については実験との比較があまりないようである。そこで、長波長方程式の有効性を検討できるように室内実験のある場合をここでは取り上げる。幸いなことに、薄い液膜に対して重力と表面張力のみが働くレイリー・テイラー不安定性に関する実験が、Fermigier *et al.*[3] によって行われている。また、後の解析結果からもわかるようにこの系のポテンシャルは非常に簡単な形をしているので、定常解を解析的に求めることができる。数値シミュレーション結果を解析的に議論できるという利点もある。

彼らは、直径56mmの容器に0.2mmの薄さのシリコンオイル層を作った。また、シリコンオイルは粘性率の大きなものを用いている。アスペクト比が非常に大きいので、側壁の影響がほとんどない実験に相当する。Whitehead and Luther[8] が以前に行った実験では、流体層はそれほど薄くなくアスペクト比も大きくない。また、それより以前に Craik[9] が定性的な実験結果について報告している。Fermigier *et al.*[7] は実験によって不安定な表面変形の時間発展に関して、以下のことを見出した。(i) 一般に1点に局在した攪乱は同心円状に広がりながら発達し、最終的には6回対称性を持つように軸対称な釣鐘状ピークが分布する。これを六角形パターンと呼ぶ。(ii) 線状に攪乱を与えると、初期はその形状を保ちながら成長し回りに平行な線状のピークが広がっていく。線状のピークが不安定になり局在した釣鐘状ピークが並び、最終的には6回対称性を持つように釣鐘状ピークが分布する。これはワイヤーを交差するように2本用いた場合でも同様である。(iii) 釣鐘状ピークの間隔は線形安定性理論の最大増幅率に対応する波数とほぼ一致する。(iv) 時間が十分経過すると、ピークは零となって落下する。最初にピークが零となって落ちるまでの時間を破断時間と呼ぶことにすると、実験では2時間くらいである。

この現象に対する理論的な説明としては、潤滑近似を用いた表面の変形を記述する長波長方程式によるものがある。Fermigier *et al.*[3] では、この長波長方程式を導き、その枠組みで振幅方程式を導出し非線形増幅率の観点から六角形パターンが生じることを議論している。Hammond[10], Yiantsios and Higgins[11] および Oron and Rosenau[12] は1次元に限定した長波長方程式（したがって、直線状の変形しか扱えない）をもとに時間発展と

定常解について考察している。実験結果からも明らかなように表面変形を1方向に一様と仮定することはできない。そこで、この研究では2次元の長波長方程式を数値的に解くことにより、実験で得られた2次元パターンが再現できるかをまず確かめる。Schwartz[13]が、差分法により予備的な数値シミュレーションを行っているが、最終状態の1例を考えているに過ぎず、その詳細については述べていない。特に、現れる釣鐘状ピークとその空間分布の特性を明らかにする。

まず、長波長方程式の導出方法およびその簡単な性質を述べる。次に、表面が1次元の場合の数値シミュレーションの結果について説明する。さらに、表面が2次元の場合の数値シミュレーションの結果を、実験との比較を交えながら与える。釣鐘状ピーク（軸対象定常解）の安定性とそれらの融合する条件について考察する。最後にこの研究のまとめと今後の課題について説明する。

2 長波長方程式の導出

2.1 問題の定式化

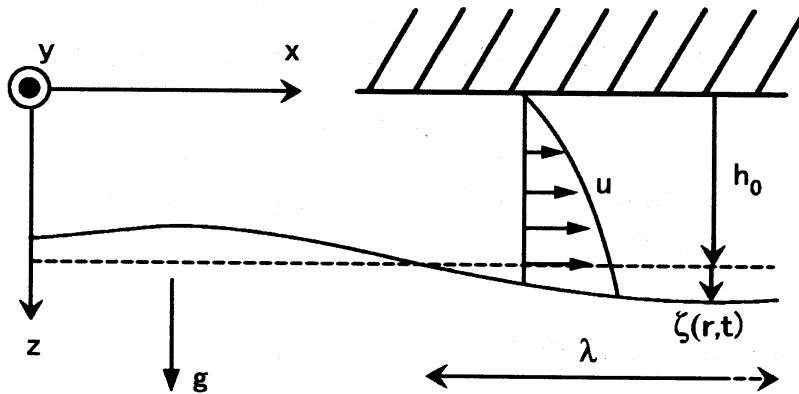


図 1: Schematic representation of a fluid film bounded by a wall and air.

固体表面に粘性流体を薄く塗った状態で生じるレイリー・テイラー不安定性をここでは扱う。図1に示すような座標系をとり、下向きを z 座標の正方向としている。密度 ρ 、粘性率 η の粘性流体が厚さ h_0 の層をなしている。重力 $\mathbf{g} = g\mathbf{z}$ が下方向に働き、粘性流体と空気の界面では表面張力係数 γ に比例する表面張力が作用すると仮定する。空気の運動は一切考えず、表面では応力自由の条件を課す。厚さは位置 $\mathbf{r} = (x, y)$ の関数： $h(\mathbf{r}, t) = h_0 + \zeta(\mathbf{r}, t)$ で表される。ここで、 $\zeta(\mathbf{r}, t)$ は表面変形であり、 h_0 は変形がないときの厚さである。なお図1において水平方向の速度成分が描かれているが、これは表面変形によって生じる弱い流れを示すもので、最初から平均流を仮定しているものではない。

3次元元非圧縮粘性流体が満たす連続の式およびナヴィエ・ストークス方程式は以下のよう

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u} \right\} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \nabla + w \frac{\partial}{\partial z} \right) w \right\} = -\nabla p + \eta \nabla^2 w + \rho g. \quad (3)$$

ここで, (\mathbf{u}, w) , $\mathbf{u} = (u, v)$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ としてあり, 水平速度成分と垂直速度成分をわけて記述してある. また, ρ は密度, p は圧力, g は重力である.

次に境界条件について考える. 上面の固体壁 $z = 0$ では, 粘性境界条件を課すので,

$$\mathbf{u}(x, y, 0, t) = 0, \quad w(x, y, 0, t) = 0 \quad (4)$$

となる. 下面の表面 $z = h(\mathbf{r}, t)$ では, 空気の粘性率が液体に比べて非常に小さいという仮定のもので接線応力が自由である条件

$$\eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

と法線応力のつりあいの条件

$$P_a - p = \gamma \nabla \cdot \left(\frac{\nabla h}{\sqrt{1 + (\nabla h)^2}} \right) \quad (6)$$

を考える. ここで, P_a は大気圧である. さらに, 運動学的条件として,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = w \quad (7)$$

が成立する. なお, 薄層が広がっている水平方向 (x, y 方向) については周期境界条件を適用し, 側壁の影響を無視した.

2.2 潤滑近似による発展方程式

低レイノルズ数の流れ (ストークス近似) と長波長不安定 ($h_0 \ll \lambda_M$, ここで h_0 は波長の厚さ, λ_M は不安定モードの波長) を仮定する. 連続の式 (1) より, 垂直速度成分 w は水平速度成分 u, v と比べて非常に小さいことがわかる. このことから, 式 (2) と (3) において w の項を落とす. さらに, 表面の勾配が小さいという仮定から法線応力のつりあいの条件において表面張力の項を簡単にする.

このような近似のもとで, 圧力, 水平速度をもとめ, 表面での運動学的条件に代入することで, 以下の発展方程式を得る.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{3\eta} \nabla \cdot \left[(h_0 + \zeta)^3 \nabla (\rho g \zeta + \gamma \nabla^2 \zeta) \right] = 0. \quad (8)$$

ここで, $h = h_0 + \zeta(\mathbf{r}, t)$ である. 表面変形 $\zeta(\mathbf{r}, t)$ の成長は, 式 (8) の第2項から重力項と表面張力項のバランスにより決定される. 重力は, 圧力が低い正の ζ の付近に集中する傾向があるが (増幅効果), 一方で表面張力は ζ の成長を抑えるように働く.

次に, この式を無次元化するため代表長さを h_0 として, 式 (8) を書き直すと, 次のようになる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[\nabla \cdot (1 + \zeta)^3 \nabla (B\zeta + \nabla^2 \zeta) \right] = 0, \quad (9)$$

$$T = \frac{3h_0}{\gamma}, \quad B = \frac{\rho gh_0^2}{\gamma}. \quad (10)$$

ここで、 B はボンド数である。

3 長波長方程式の性質

$\zeta \propto \exp(\sigma t + ikx)$ と仮定し、それを式 (9) の線形項のみに代入しすると、以下の関係式が求まる。

$$\sigma = - \left(k^2 - \frac{B}{2} \right)^2 + \frac{B}{4}. \quad (11)$$

これは攪乱の波数と線形増幅率の関係を示しており、重力項が攪乱の成長要因であり、表面張力が抑制要因であることがわかる。長波長の不安定が生じることがわかり、方程式を導く際に表面勾配が小さいと仮定したと整合性がある。また、 σ の最大値 σ_{max} は、 $k_M = \sqrt{\frac{B}{2}}$ のときの

$$\sigma_{max} = \frac{B}{4} \quad (12)$$

である。波数が k_M の攪乱が最も成長しやすいことが予測される。

長波長方程式 (9) のエネルギーの時間発展について考える。

$$E = \int \left(\frac{1}{2} (\nabla \zeta)^2 - \frac{B}{2} \zeta^2 \right) dV \quad (13)$$

と定義し、式 (9) を考慮すると、

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \int (1 + \zeta)^3 \left| \nabla (B\zeta + \nabla^2 \zeta) \right|^2 dV < 0 \quad (14)$$

となる。エネルギー E は単調減少することを示しており、時間に依存するアトラクターはありえないことがわかる。

次のような特別な場合を考えると、式 (9) の定常解の条件を満たす。

$$B\zeta + \nabla^2 \zeta = \alpha. \quad (15)$$

ここで、 α は任意定数である。このヘルムホルツの方程式の解は自動的に定常解の条件を満たす。

$$\zeta = A \sin \sqrt{B}x + \zeta_0 \quad (16)$$

は 1 次元の解である。ここで、 $A, \zeta_0 = \alpha/B$ は任意定数である。周期境界条件で質量保存則を考慮すると、 $\zeta_0 = 0$ となる。ここで ζ は、初期の状態 (薄層が平らな状態) からの変形のみを表しており、固体壁と接触しないためには、 $-1 < A < 1$ が必要である。この解の振幅の大きさは自由にとることができるが、横幅は一定であることがわかる。もともとの方程式は非線形であるにもかかわらず、振幅の大きさが特定のものに定まらないことがわかる。

軸対称解は次のように 0 次のベッセル関数で表すことができる。

$$\zeta = A J_0(\sqrt{B}r) + \zeta_0. \quad (17)$$

ここで, $A, \zeta_0 = \alpha/B$ は任意定数である. $r = r_{min} = \sqrt{B}r_1$ で最小値をとるとすると, $AJ_0(r_{min}) + \zeta_0 > -1$ を満たす必要がある. 後に説明するが, 表面が 2 次元の場合のシミュレーション結果において釣鐘状のピークが現れるが, $0 < r < r_{min}$ の範囲で定常軸対称解で近似できることがわかる. 興味深いことに, この円領域の体積を求めると,

$$2\pi \int \zeta r dr = 2\pi r_{min}^2 \zeta_0 \quad (18)$$

のように振幅 A に依存しない. したがって, ζ_0 を保ったまま A が変化したとしてもこの円領域での流量は保存したままである.

4 数値シミュレーション (1 次元)

今回用いたパラメータが表 4 に示されている. Fermigier *et al.*[3] が用いたものを採用している. ここで $\lambda_M = 2\pi h_0/k_m \approx 13.2\text{mm}$ より, $h_0/\lambda_M \approx 0.0152$ となり, 長波長近似の仮定は満たされている.

parameter	numerical value	dimension
typical thickness h_0	0.0002	m
viscosity η	1.0	$kg/m \cdot s$
density ρ	970	kg/m^3
kinematic viscosity ν	0.001031	m^2/s
surface tension γ	0.021	N/m

表 1: Definitions and values of parameters.

数値計算方法については, 空間についてはフーリエガラーキン法を, 時間発展については前進オイラーと 4 次のルンゲクッタ法を用いた. また, 最小の表面厚さが初期厚み h_0 に対して $\zeta = (-1.0 + 10^{-4})h_0$ にまで達したとき (液膜の厚みが 0 に近づくとき) に壁に付着するとみなし, 計算を止めた.

図 2(a) は初期条件として最大増幅率に対応する波数の微小なサインカーブを 1 周期与え, $T \approx 2.1 \times 10^5$ までの結果が示されている. 図 2 において重力を上向きにとっているため, $\zeta = -1$ が固体壁面に相当する. 時間が進むにつれて重力方向にピークが生じ, 壁面方向には 2 つのくびれを形成しながら表面変形しほぼ定常な状態となる. 右の極小値から左の極小値までは, ほぼ $\zeta = A \sin \sqrt{B}x + \zeta_0$, ($A = 1.23, \zeta_0 = 0.41$) で表すことができる. 定常解が部分的に実現していることになる. しかしながら, 最大増幅率に対応する波数が $\sqrt{B/2}$ であるので左の極小値から右の極小値までの余分な長さが生じて完全な定常解にはなっていない. 空間領域を大きくして微小な攪乱を加えても (攪乱はサインカーブの初期の大きさ 10^{-2} の 1000 分の 1 としている) 同じ形状の列が形成される (図 2(b)).

図 3 に示すように波形は静止まることなくゆっくりと変化を続ける. この変化の様子を調べるために, 図 3(b) は図 2(a) の発展方程式の右辺についてプロットしている. 左の部分 $0 < x < 60$ と $x = 100$ のあたりはほぼ定常と考えられるが, そのつなぎめの部分は空間変化しているので, $\zeta_t \neq 0$ となる. すなわち, 定常状態になることはない. この結果

は Hammond[10], Yiantsios and Higgins[11] および Oron and Rosenau[12] の研究の結果と一致している。なお, Hammond[10] において $\zeta = -1$ となる時間は無限大であることが解析的に示されている。

なお, ランダムな微小攪乱を初期条件とすると, 最大増幅率の波長に対応する形状が並んだ最終状態になるが, 変調がかかったような波形が形成されることがあり, 広い系では初期値依存性がある。

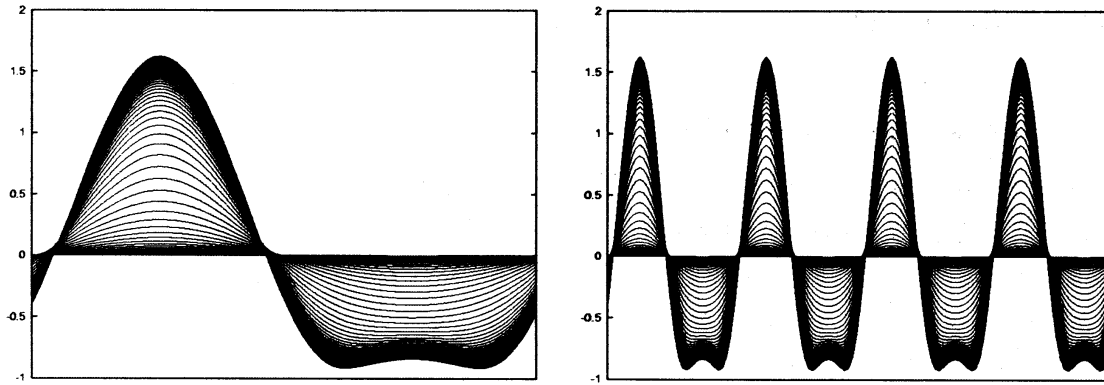


図 2: Time-evolution of the thin-fluid surface. Initial condition is a sinusoidal curve with the wavenumber $\sqrt{B/2}$. The gravity- direction is upward. (a) one wavelength, (b) four wavelengths.

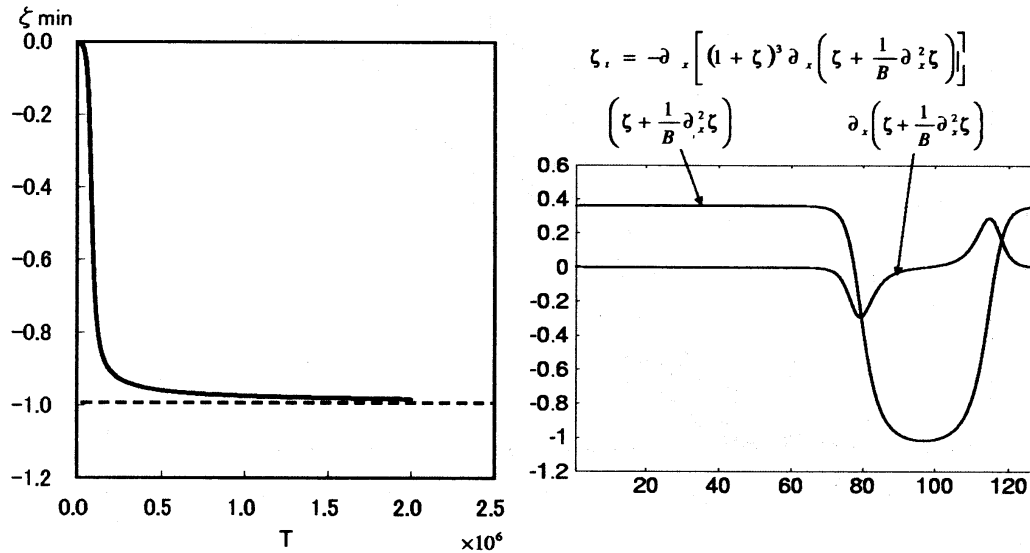


図 3: (a) Time-evolution of the minimum amplitude. Initial condition is the same as in fig.2(a). (b) The right-hand terms of the evolution equation are plotted at $T \approx 2.1 \times 10^5$.

5 2次元の場合の数値シミュレーション結果

実際の実験と関連する2次元の場合の数値シミュレーション結果についてここでは述べる。初期条件としては、(i)1方向に伸びたロールがトタンの屋根のように並んだもの（ロール攪乱）、(ii)1点に局在したガウス分布（1点局在攪乱）、(iii)線状に小さな丘を与えたもの（線状攪乱）、(iv)2本の直交する線状に小さな丘を与えたもの（直交線状攪乱）以上の4つの場合には計算領域全域に微小なランダムを加える。(v)ランダムのみ（ランダム攪乱）の合計5つを用いた。

5.1 最大値・最小値の時間発展

計算スキームのチェックとして、時間発展の初期段階で振幅の成長が線形最大増幅率に一致することとエネルギーが単調減少することを確認した。

図4と図5は薄層表面の振幅の最大値と最小値の時間発展を示している。振幅の最大値が急激に増加している部分があるのは、成長してきたピークが周りにあるピークと融合しているためである。破断に至るまでの振幅の伸び方が異なっているのは、ピークができる場所と個数に大きく依存するためと考えられる。また、振幅の最大値が1次元変形の場合についてかなり大きくなっているのは2次元の場合局所的な成長が可能のためと考えられる。

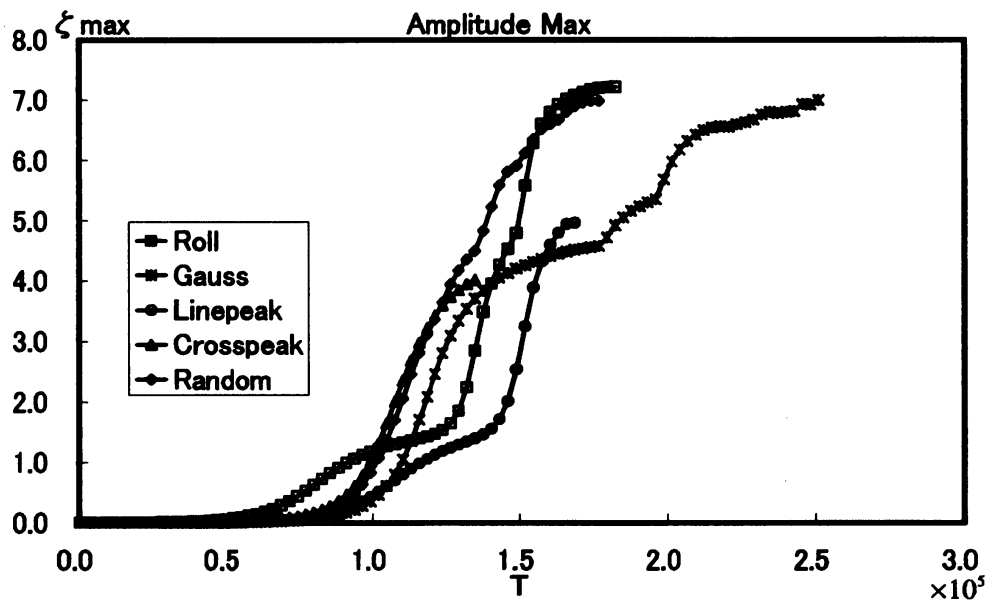


図 4: Time-evolution of the maximum amplitude up to the rupture. $B = 0.0181$, Grid number is 128×128 , $L = 8$.

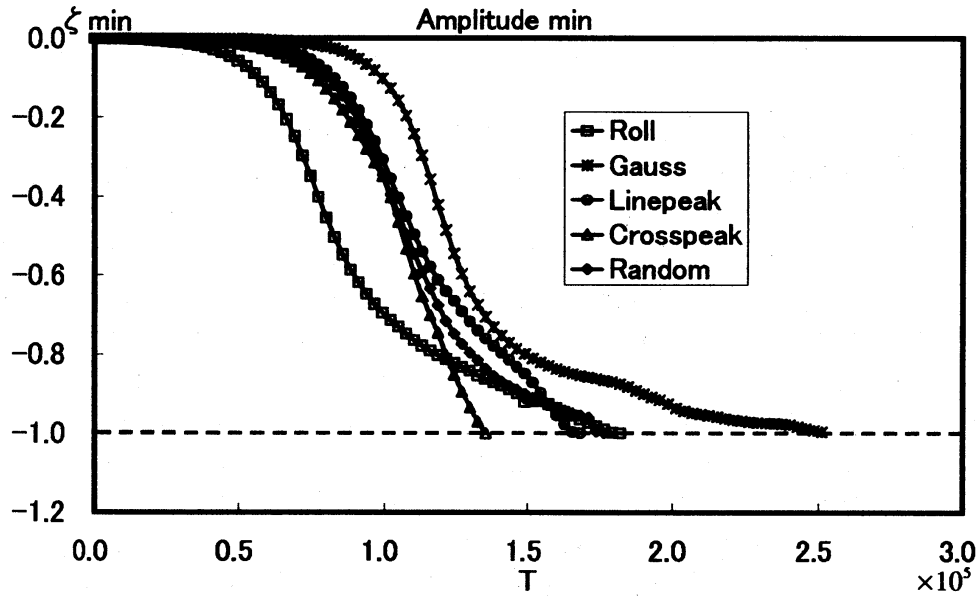


図 5: Time-evolution of the minimum amplitude up to the rupture. $B = 0.0181$, Grid number is 128×128 , $L = 8$.

5.2 表面の時間発展

以上の初期条件において計算を行った結果が次の図 6 ～ 10 である。初期条件にかかわらず、最終的な状態は、軸対称なピークが 6 回対称性に近いように配列することが多く、1 次元性は保たれないこと、破断 (表面が固体壁に付着する) 時間が 1 次元の場合と異なり有限であること ($T \approx 1.7 \times 10^5$) 表面の最大振幅が $\zeta_{max} \approx 7.0$ (実空間で 1.4mm) あたりまで伸びるということがあげられる。また、表面変形が発達する過程において軸対称ピークが成長して形成される。十分に発達していない隣接したピークは互いに引き合い融合し、1 つの軸対称ピークとして成長することが見られた。

図 6 は微小なロールにさらに微小なランダムを加えた場合の時間発展が、示されている。ロールが発達しかなり大きくなった後に、一様な方向に不安定となり ($T = 1.41 \times 10^5$)、軸対称なピークがほぼ等間隔で形成されることがわかる。隣の列とはピークの並び方の位相が異なり、6 回対称性に極めて近い分布を示すことがわかる ($T = 1.57 \times 10^5$)。

右端の上から 3 番目のピークの動きに注目する。 $T = 1.41 \times 10^5$ においては 2 つの小さなピークが隣接してあまり成長していないことがわかる。 $T = 1.49 \times 10^5$ で融合を始め $T = 1.57 \times 10^5$ においては軸対称ピークを形成するが、そのとき振幅が他のピークよりも大きい (ほかのピークの平均振幅は 5.23, 融合したピークの振幅は 7.21)。 $T = 1.80 \times 10^5$ で、この付近で破断する。

図 11(a) には、最終状態における $B\zeta + \Delta\zeta$ の分布が示されている。軸対称ピークでは、一定の値を取っていることがわかるので、軸対称ピークは定常解で近似できることが示唆される。また、実際の時間発展においてもほぼ止まっているように見える。軸対称ピークとの比較は後に行う。中心の動きの少ない部分では、ピークとピークの間の振幅の小さい

領域がほぼ一定の値を取っているが、動きのある端の部分では、小さなピークが発達していることがわかる。

次に、図 7 は Fermigier *et al.*[3] が行った実験と同様の初期パターンを再現したものである。彼らの実験では、初期パターンで単独の微小なピークを、液層表面にある小さな塵が原因でできたものとしており、それと同じ状態をガウス分布により再現している。時間発展が進むと局所的な攪乱から同心円状に振幅が広がりながら成長していく。中心の振幅の大きい円環状の部分から分裂しながら軸対称ピークが形成されていくことがわかる。最初の円環の部分ではピークが 6 つ形成されているのは興味深い。また、中心から 2 番目の円環では 12 個形成されている。3 番目の円環部分では小さなピークの融合が生じており大きなピークが 4 つ形成されている。ここでは、大きなピークの間に小さなピークがあるが、それを吸収するように大きなピークが移動しますます大きくなり破断が生じている。隣接したピーク間では引力が働くようであり、この点も後に検討する。

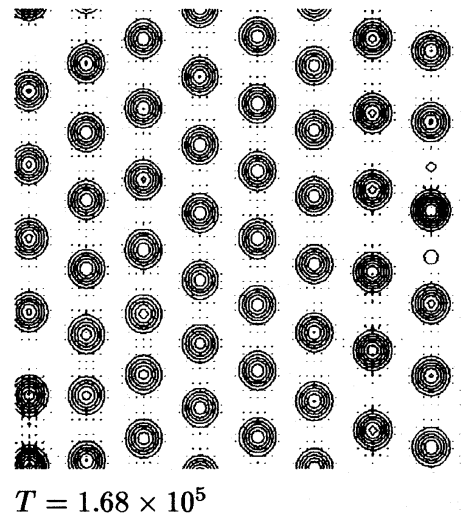
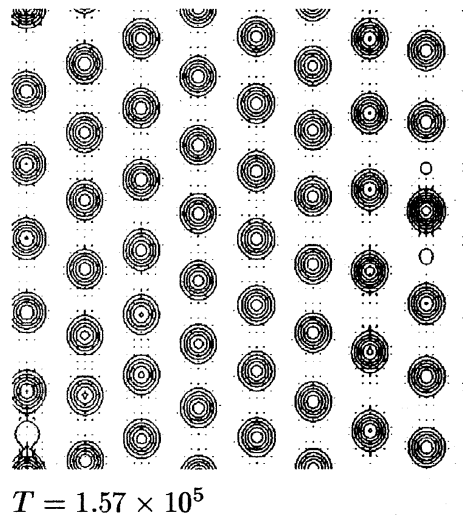
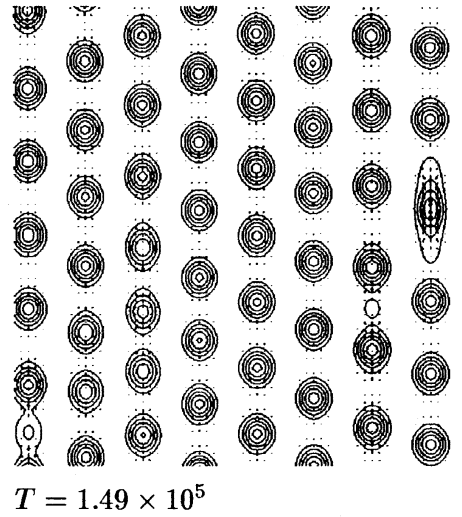
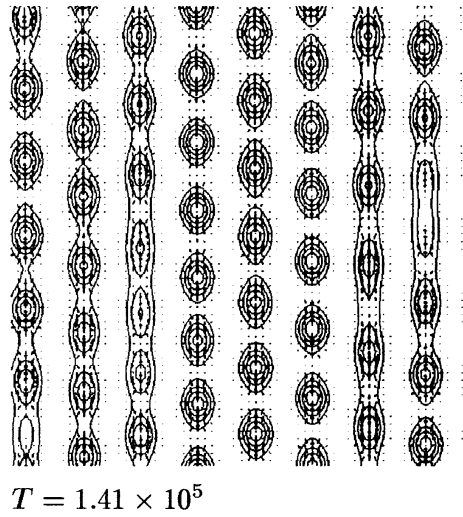
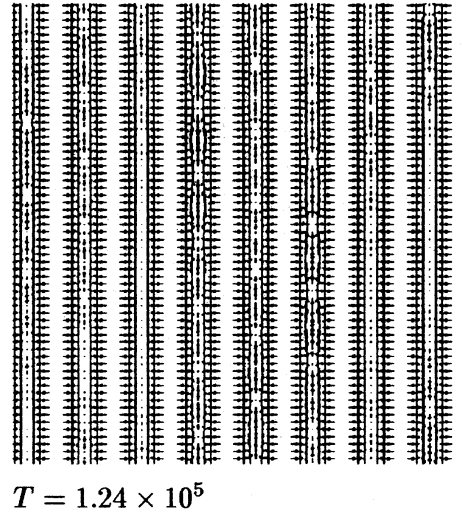
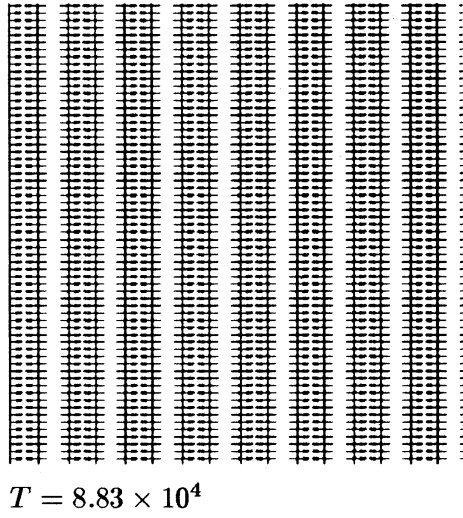
6 角形パターンを形成するものになっていき、最終的に破断する。破断時間はおおよそ $T = 2.45 \times 10^5$ で、これは実験の約 2 時間とおおよそ一致する。図 11(b) には、最終状態における $B\zeta + \Delta\zeta$ の分布が示されている。

図 8 は、実験で一本の長い針金で作った攪乱に似せた初期条件の時間発展を示している。定性的なパターンは実験とよく似ていることがわかる。破断する直前の図が最後の図である。

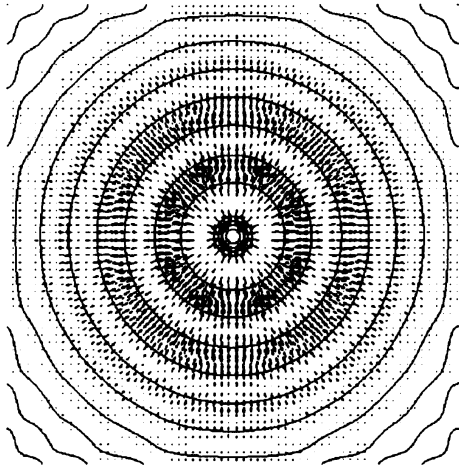
図 9 は、実験で 2 本の長い針金を直角に交差させて作った攪乱に似せた初期条件の時間発展を示している。この場合も定性的なパターンは実験とよく似ており、軸対称ピークの正方形格子が他の場合と異なり形成されている。この場合はピークの振幅が他の場合よりも小さいという特徴がある。このように振幅のピークは初期条件によらずに決定されるものではなく、全体の配置のような他のピークとどのように隣接しているかに密接に関係しているようである。破断する直前の図が最後の図である。

図 10 は、微小なランダムからの時間発展を示している。それほどきれいに並んでいるわけではなく、6 回対称性に近いかどうか検討する余地がある。また、 $T = 1.35 \times 10^5$ の上の部分でピークの融合が見うけられる。大きなピークの周辺で破断が生じるのは他の場合と同様である。

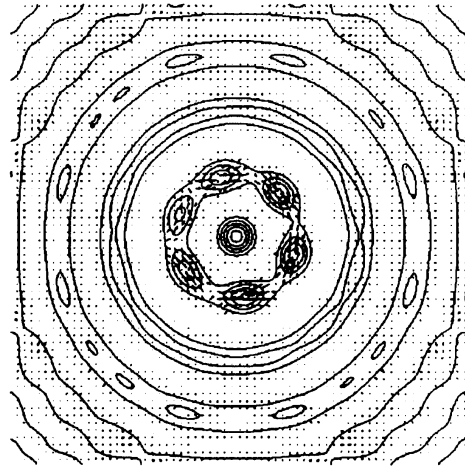
また、破断する直前での平均波数については、ロールでは、 $\bar{k}/k_M = 1.15$ 、ガウスでは、 $\bar{k}/k_M = 1.13$ 、ラインピークでは、 $\bar{k}/k_M = 1.12$ 、クロスピークでは、 $\bar{k}/k_M = 1.10$ 、ランダムでは $\bar{k}/k_M = 1.14$ という結果を得た。最大増幅率に対応した波数よりも若干大きな値が算出された。なお、ランダムの場合の破断した時の表面の隣り合うピークの距離を計り、実験的に波長の比を求めると、 $(\lambda_p/\lambda_M)_{cal} \approx 1.20$ という結果になり、Fermigier *et al* が実験で求めた比率、 $(\lambda_p/\lambda_M)_{exp} \approx 1.19$ と非常に近い値をとることがわかった。このような間隔は最初にピークの種ができる間隔が最大増幅率を与える波長で決定されることを反映しているためと思われる。後に吸収したりするのでやや間隔が広がったのであろう。



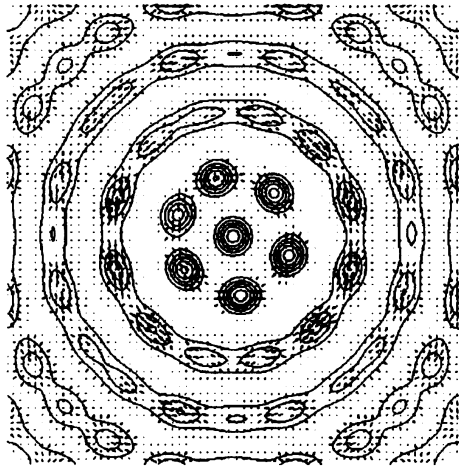
⊠ 6: Time-evolution of the thin-fluid surface. (a) Initial condition is a sinusoidal curve with the wavenumber $\sqrt{B/2}$.



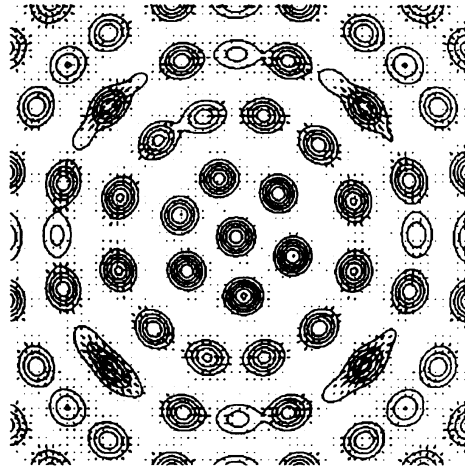
$$T = 1.35 \times 10^5$$



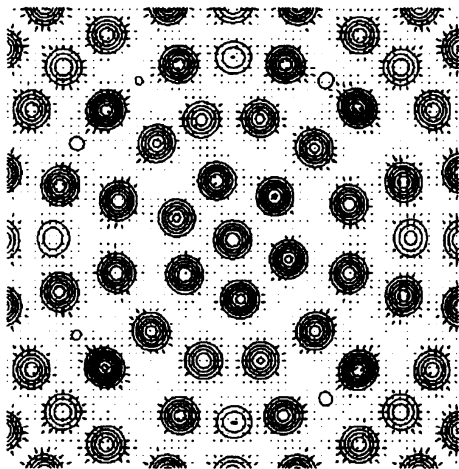
$$T = 1.71 \times 10^5$$



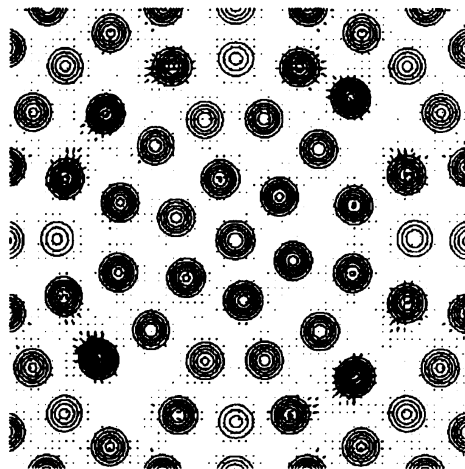
$$T = 1.79 \times 10^5$$



$$T = 1.90 \times 10^5$$

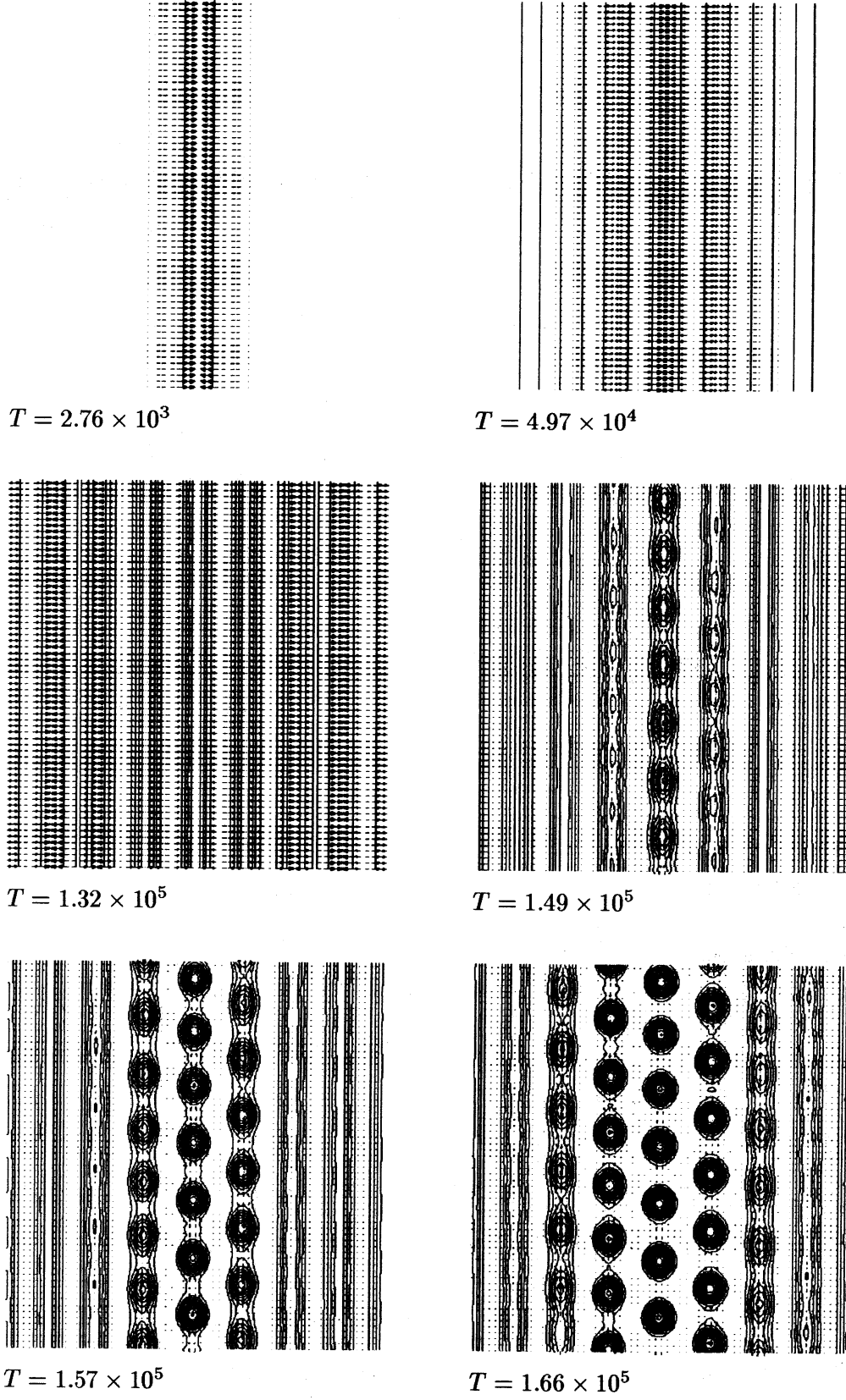


$$T = 2.07 \times 10^5$$

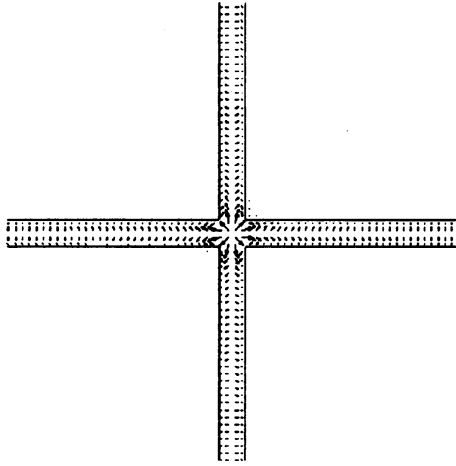


$$T = 2.46 \times 10^5$$

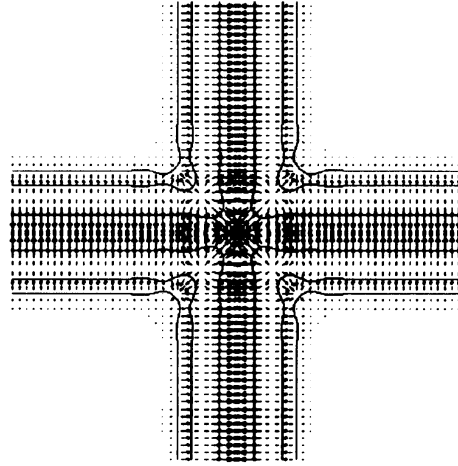
FIG. 7: Time-evolution of the thin-fluid surface. (b) Initial condition is a Gauss distribu-



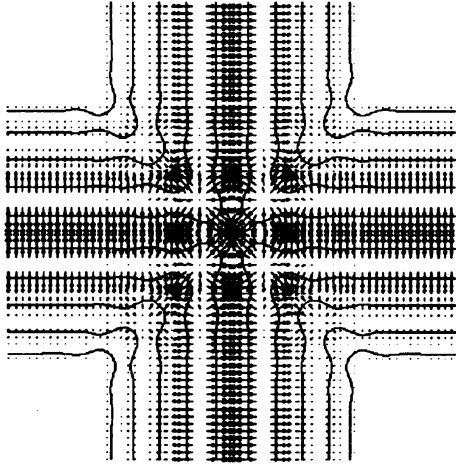
⊠ 8: Time-evolution of the thin-fluid surface. (c) Initial condition is one line with a wavenumber $\sqrt{B/2}$.



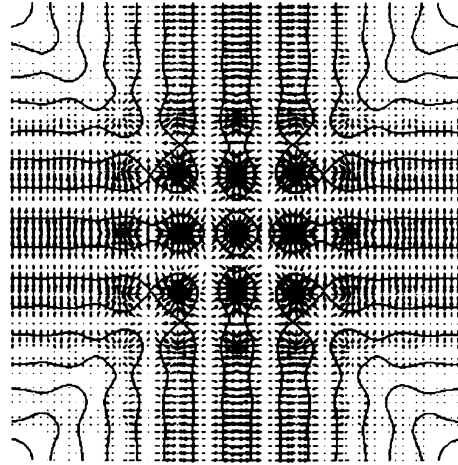
$T = 0.0$



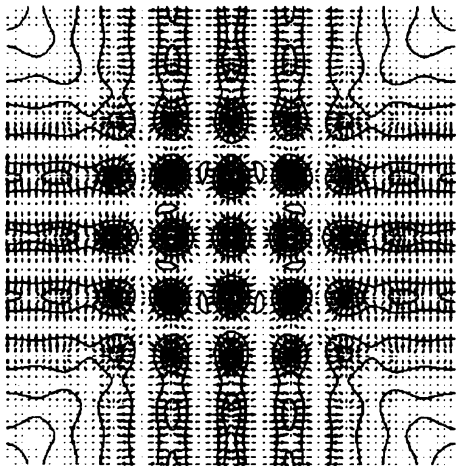
$T = 1.10 \times 10^4$



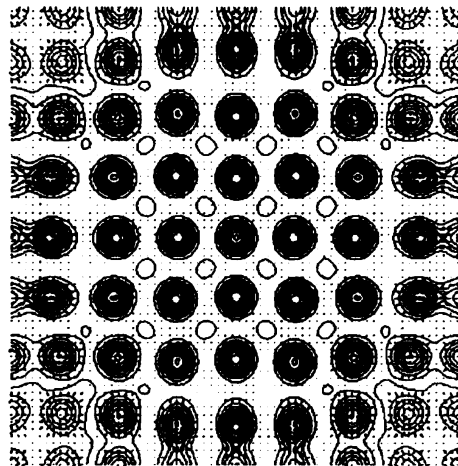
$T = 3.59 \times 10^4$



$T = 9.66 \times 10^4$

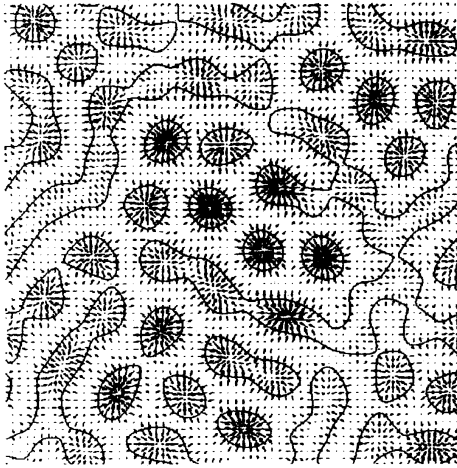


$T = 1.08 \times 10^5$

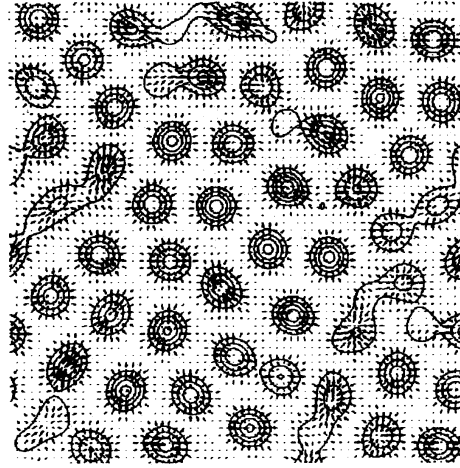


$T = 1.32 \times 10^5$

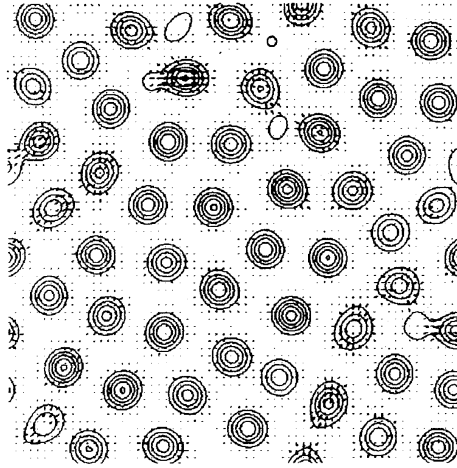
⊠ 9: Time-evolution of the thin-fluid surface. (d) Initial condition is normal crossed



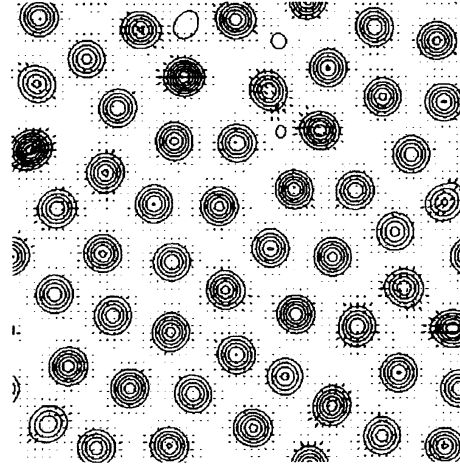
$$T = 1.08 \times 10^5$$



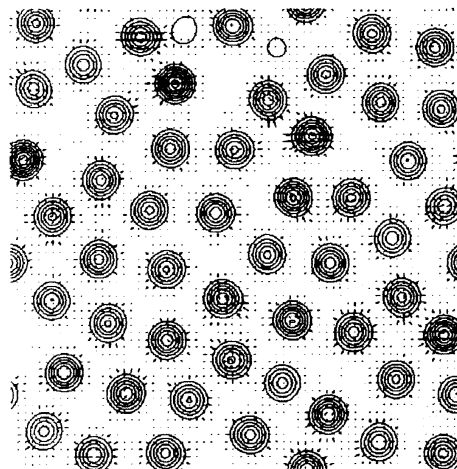
$$T = 1.24 \times 10^5$$



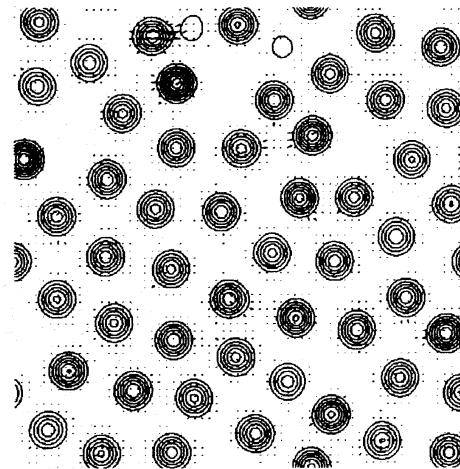
$$T = 1.35 \times 10^5$$



$$T = 1.46 \times 10^5$$

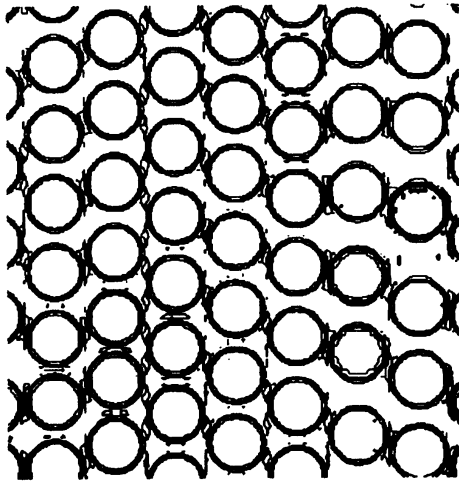


$$T = 1.60 \times 10^5$$

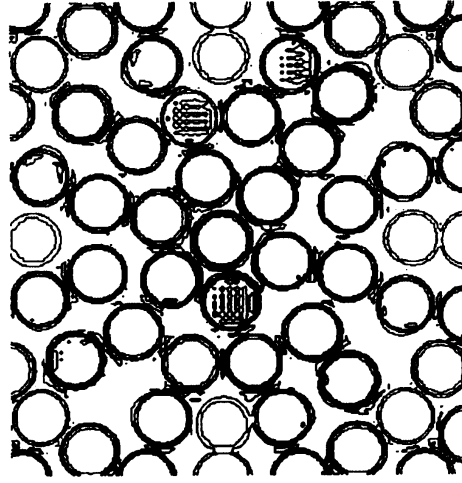


$$T = 1.74 \times 10^5$$

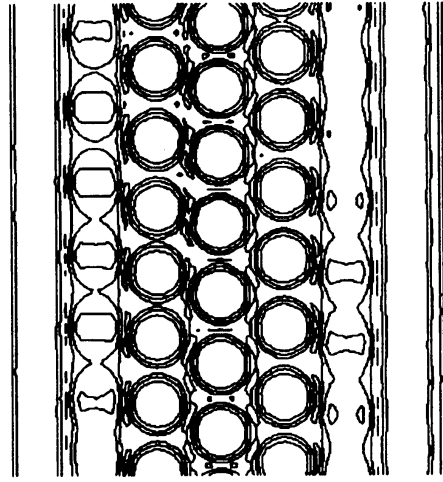
⊠ 10: Time-evolution of the thin-fluid surface. (e) Initial condition is small random



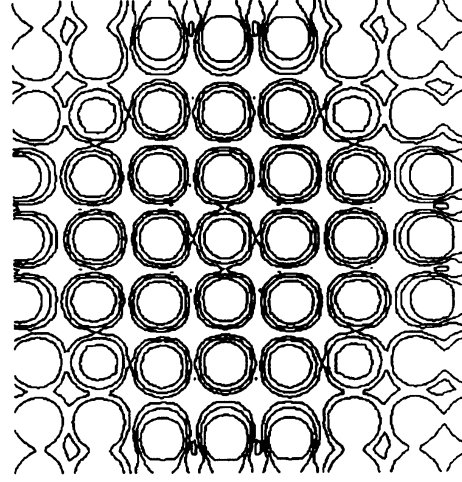
(a) Roll



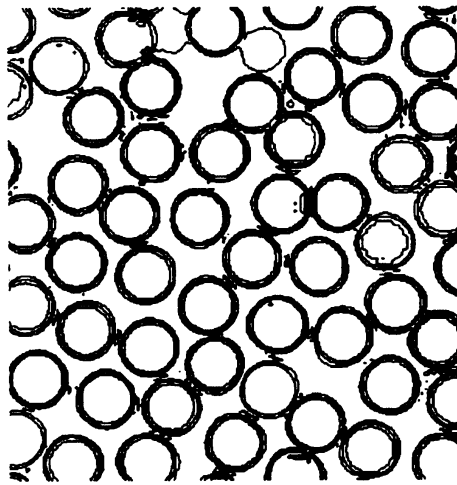
(b) Gauss



(c) Linepeak



(d) Crosspeak



(e) Random

FIG 11: Final states of the term $B\zeta + \nabla\zeta$.

5.3 軸対称定常解との比較

図 12 に示すように、軸対称ピークは 0 次のベッセル関数で与えられる定常軸対称解の最大値と最小値の間でほぼ一致していることがわかる。以前にも述べたが、 $0 < r < r_{min}$ の間での体積はちょうど 0 になる。また、この領域では $B\zeta + \Delta\zeta$ が一定の値を取っている。なぜこの間隔が選択されたのかはわからないが、円環部分はロールのようになるので不安定なのであろう。

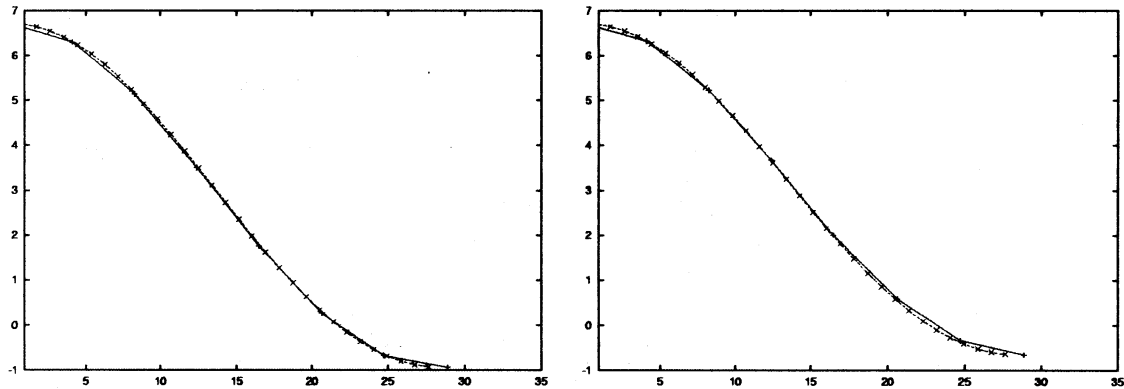


図 12: Comparison between an axisymmetric peak and the steady solution. (a) x -direction, $n_x = 5$, $n_y = 3$, $\zeta_0 = 1.262$. (b) y -direction, $n_x = 5$, $n_y = 5$, $\zeta_0 = 1.465$.

5.3.1 時間発展

時間発展が進み、ピークが成長を続けていくと、その形は軸対称性を持つようになってくる。図 13 は、(i) ピークがある程度大きなもの、(ii) 将来的に融合してしまわないもの、という条件のもと、計算領域全体で一つ一つのピークについてベッセル関数 (式 (17)) に重ねあわせ、求めた A と ζ_0 の平均を取ったものである。このように軸対称ピークは形状は軸対称定常解に近いが時間発展していることがわかる。これはピーク間の領域は非定常性を持っているためピークの境界のところでピークの非定常性が生じているためと考えられる。時間発展段階においてほぼ定常解に近似されつつ成長を続けるのは軸対称定常解が安定な構造であることを示唆している。また、 A と ζ_0 の値は初期条件に依存しており、特に一意的に決定されるわけではないことも示された。特に、クロスの初期条件からのものの値が異なっていることは、これらの値が隣接するピーク間でも相互作用に影響されることを示している。

図 13 では、 ζ_0 の成長が頭打ちになりほぼ一定を保つようになるのが、 A よりも早いことが注目される。準定常軸対称ピークの領域の体積がほぼ一定になるまでの過程とその後に振幅がゆっくり成長して破断に至る過程という 2 つの成長過程があることがわかる。このような識別は実験では非常に困難であると考えられる。後の段階では体積を保存したまま定常軸対称解をほぼ保ちつつ成長するところが興味深い。

また、破断に至るピークのまわりには小さなピークがあり、ほぼ止まってしまったピークのまわりはほぼ平面的になだらかになっているという特徴がある。このようにまわりの状況によってピークの成長は決定される。

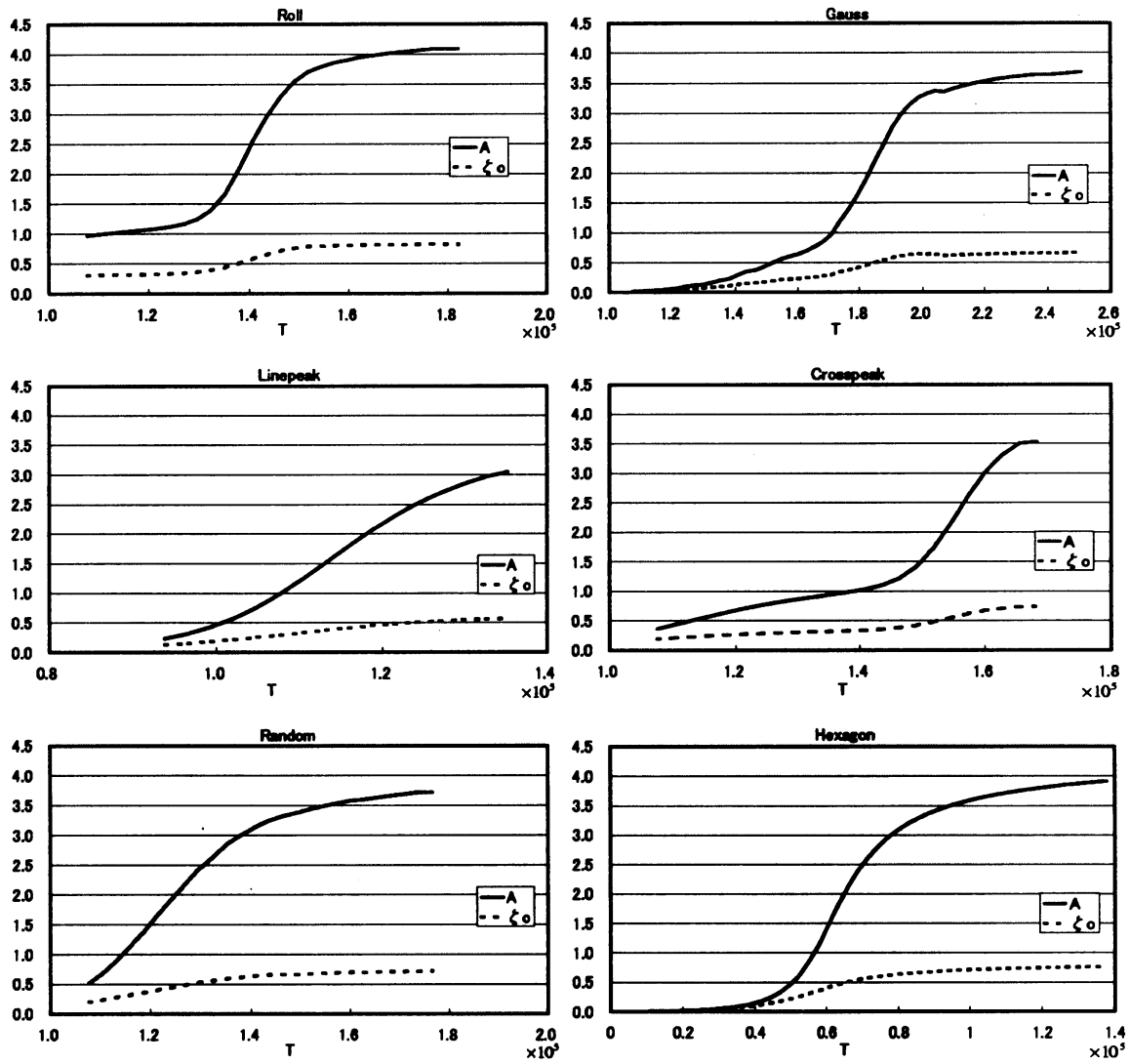


図 13: Time-evolution of averaged values of A and ζ_0 .

そして、表 2 は、破断した最終状態での A , ζ_0 である。このように初期条件の違いによりこれらの値も異なる。

	A	ζ_0
Roll	4.089	0.822
Gauss	3.685	0.664
Linepeak	3.532	0.735
Crosspeak	3.053	0.573
Random	3.722	0.720

表 2: Averaged values of A at the final states.

5.3.2 液滴落下条件との比較

準定常軸対称ピークがある程度大きくなると、自分の重みで落下することが考えられる。ここでは固体壁と接触角が0の孤立した液滴の落下条件との比較を考える。

液滴が落ちる条件として、Fermigier *et al*(1992)によると、孤立した軸対称な液滴が接触角0で固体壁に付着している場合の臨界体積 V_c は以下のように与えられる。

$$V_c = 19\lambda_c^3 = 19 \left(\frac{\gamma}{\rho g} \right)^{3/2}. \quad (19)$$

したがって、今取り扱っている系では、 $\lambda_c = 1.49$ mm であるので、 $V_c = 62.85 \text{ mm} = 7856.25 d^3 \text{ mm}$ である。ところで、定常軸対称ピークの体積は、

$$V = \zeta_0 \pi \left(\frac{3.8}{\sqrt{B}} \right)^2 d^3 \text{ mm}, \quad (20)$$

で与えられる。今、 $B = 0.018$ なので、 $V = 2518.4 \zeta_0 d^3 \text{ mm}$ である。したがって、落下するための臨界体積になるためには、 $\zeta_{0c} = 3.12$ よりも大きくななければならない。破断するときの ζ_0 は1~2(Rollの時融合した最も大きいピークで1.478)程度であるので、孤立した液滴の落下条件よりもかなり小さい値である。

この数値計算からはこの後どのように振舞うかを予測することはできない。そのためには、接触したときの境界条件は実験と適合するようにモデル化する必要がある。Fermigier *et al*(1992)の実験においては、 ζ_0 は不明であり、彼らは別の方法で体積の評価を行っており、孤立液滴の落下条件よりも小さい体積で雫が落ちることを報告している。彼らは孤立していることと液層として連結していることの違いと述べているが、われわれもこの考えに賛成である。実験において始めて雫が落ちる時間と数値シミュレーションにおいて破断する時間とがオーダー的に一致することから、われわれは、破断することと雫が落ちることは密接な関係があると推測している。破断すると何らかのインパクトが生じその結果、定常なら落ちずに耐えられるような液滴でも落ちてしまうのではないかと推察している。

6 準定常軸対称ピーク

以上の数値計算結果から、準定常軸対称ピークの形状およびその空間分布でこの系の状態は特徴付けられることが明らかになったので、このピークの性質についてここでは明らかにする。

定常軸対称解となる0次のベッセル関数を最大値から最小値 ($0 < r < r_{min}$) まで切り取った解の安定性を調べる。このように切り取ることで周りが最小値で平面的に広がっているとすると、空間1階微分まで連続的につながっていることになる。このような連続性があるためにここで切れた状態が数値シミュレーションで出現するのかもしれない。このように定常軸対称解と平面を結びつけたものはその各々の領域では定常解になるが、つなぎ目のところで方程式の右辺で不連続が生じ、全体として定常解を構成することはない。言いかえると、部分領域での定常解になっている。実際、このような解を初期条件として時間発展の数値シミュレーションを実行すると、境界の値がゆっくりと減少していく。

6.1 定常軸対称ピークの安定性

そこで、われわれは $0 < r < r_{min}$ の領域のみでの解の安定性を調べることにした。この場合はピークの構造以上の長波長の攪乱を除外して考えることになる。つまり構造の局所安定性を調べることに相当する。数値的には、円領域の外部を強制的に最小値に固定することでこの状態を実現した。

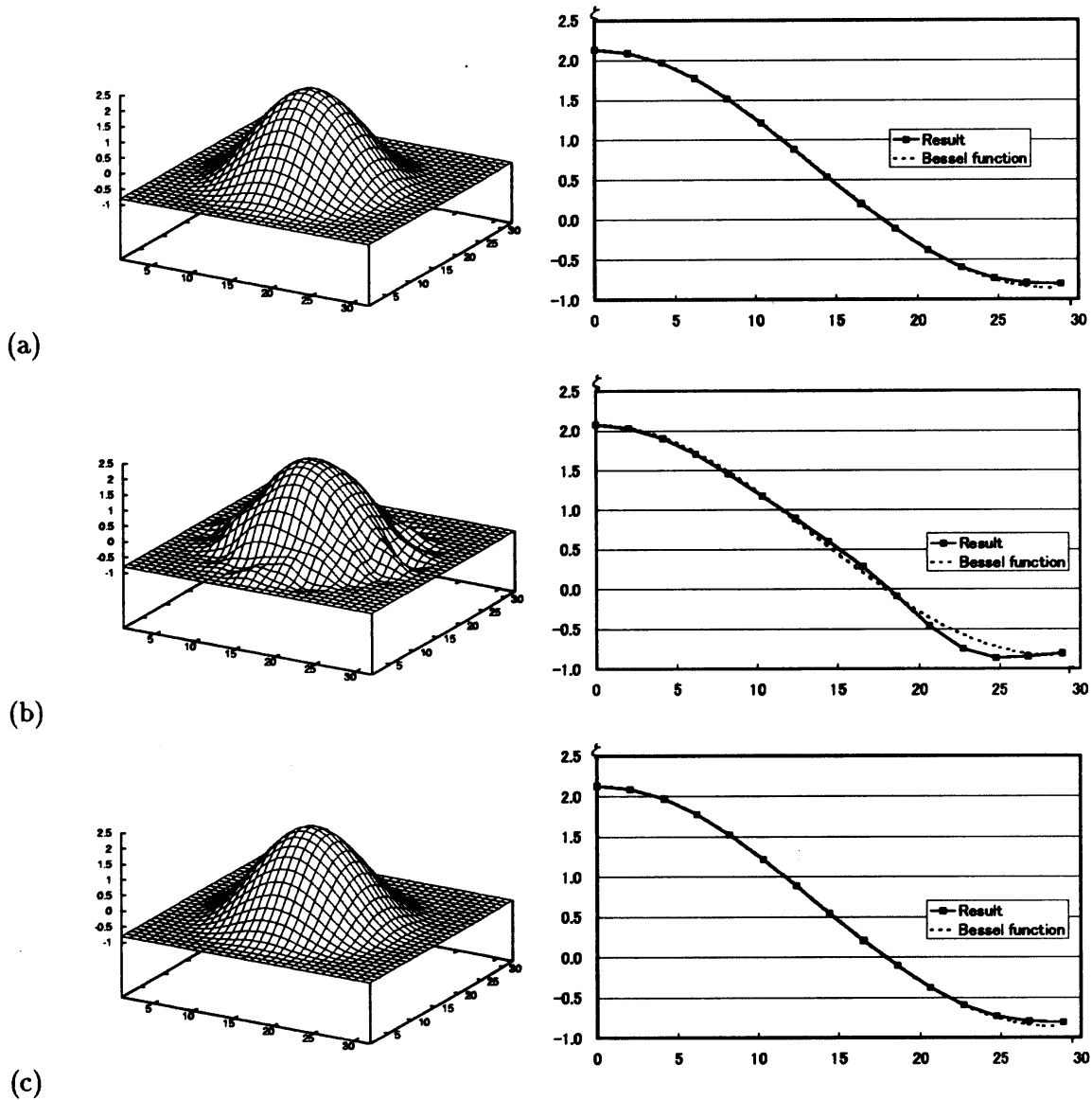


図 14: Stability of the steady axisymmetric solution. (a) the steady solution, (b) added by disturbances and (c) return to the initial steady solution.

このような状態を作った後に、安定であることを確かめるために、質量を保存する微小な攪乱を加え、もとの形に戻るかどうかを時間発展を行うことで調べた。図 15 で $A = 2.13$ の場合を示すように、初期の軸対称定常解にもどることがわかる。このことを $A = 0.5 \sim 2.3$ の範囲で確認した。このことは A の値に依らず、また明らかに ζ_0 には依らず、この軸対称

定常解が安定であることを示している。したがって、安定性から振幅 A が決定されと考えるのは困難である。

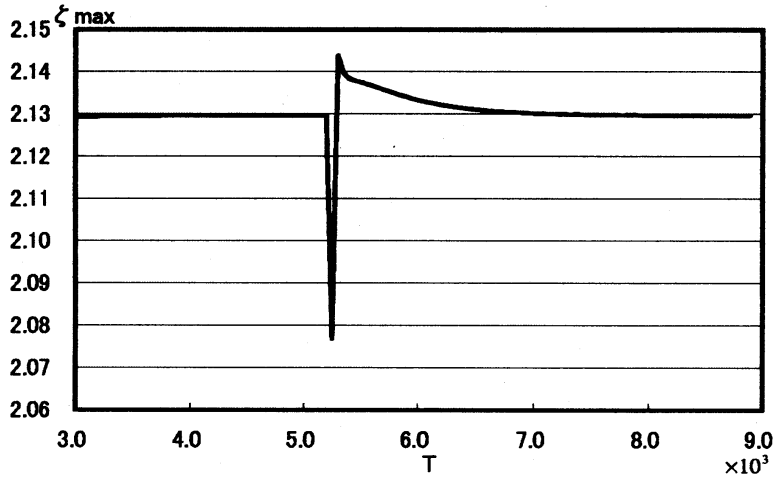


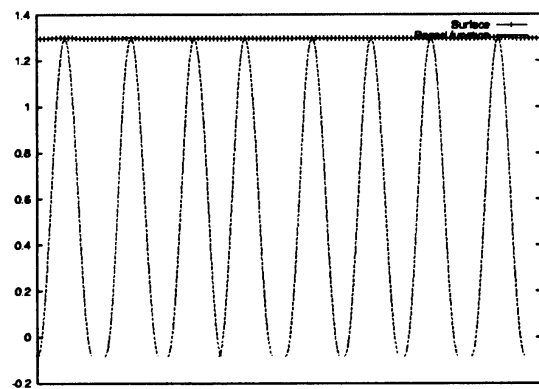
図 15: Corresponding time-evolution of the maximum value.

6.2 ピークの融合の条件

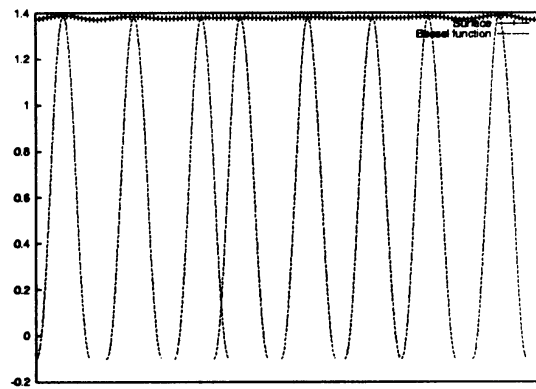
計算結果から、ピークが隣り合うものと融合し振幅を伸ばすことが確認できるが、その条件について考える。図 16 は初期条件をランダムにしたときの、ピークの融合が起こる点を縦方向に切ったものであり、その断面でのピークをベッセル関数と重ね合わせたものである。先述したように、ある程度成長したピークは軸対称のものとなり、その中では質量が保存された状態になる。言い換えれば、安定したピークになるまでは周りの流体を引き込んで成長を続け、その流体の引き込みがピークの融合に密接に関係していると考えられる。図 16 では、発達初期からベッセル関数が重なっているところではピークの融合が起こっていることがわかる ($T = 1.214 \times 10^5$)。しかし、全体の表面がまだ大きく歪んでいないため、破断の原因となるような大きなピークには成長しない ($T = 1.241 \times 10^5$)。しかし、ピークが一つ減ったということで、後になって右隣にあるピークが不安定となり重なり始める。このとき、ベッセル関数の間隔が狭いほうにその影響が働いていることがわかる ($T = 1.324 \times 10^5$)。重なったピークは成長を続けるが、それは他と比べて遅い。これは、横方向の動きが単独のピークと比べて大きいことが原因であると考えられる ($T = 1.462 \times 10^5$)。しかし、十分に流体を吸い込んだピークは成長スピードを急激に高め、最大振幅となるピークに成長し、最終的にはこの付近で破断となる ($T = 1.572 \times 10^5$)。

これから言えることは、あるピークをベッセル関数で近似したとき、2つのピークの領域 ($0 < r < r_{min}$) 重なったときに融合が起こると考えられる。また、ピークとピークの間にある小さな振幅は、ベッセル関数で十分近似できるピークの間を補完するために生じたものであると考えられる。その小さなピークの振幅が周りと比べて比較的小さいとき、流体を引き込む力が小さくなった (準定常状態) ピークとは引き合うこともなく釣り合い、振幅が比較的に大きいときには周囲の大きなピークと引き合い、最終的に融合されてしまい、破断の原因となる。初期条件がランダムにおいては、比較的振幅の大きなピークが動

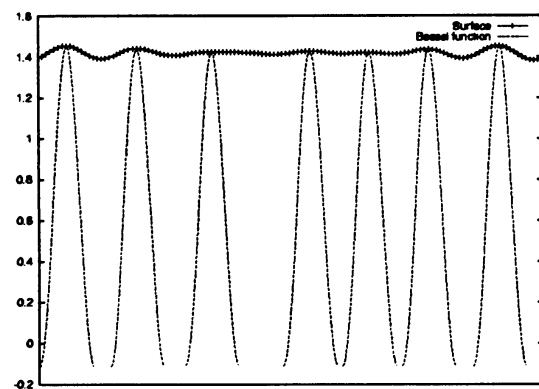
く様子が確認できたが、これはある程度成長してしまった小さな振幅を吸収しようとした結果生じた移動ではないかと考えられる。



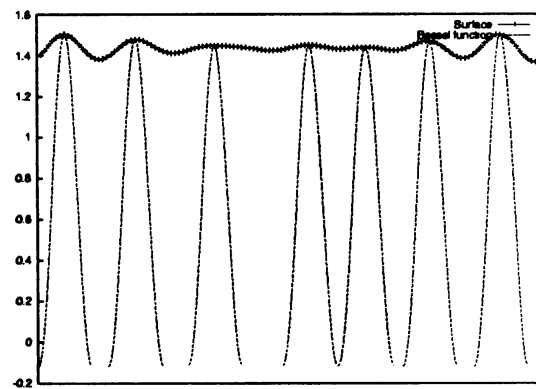
$$T = 1.076 \times 10^5$$



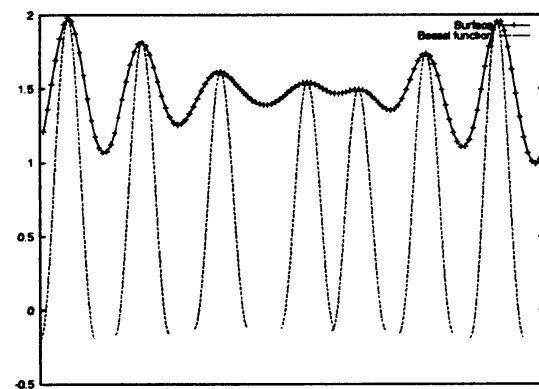
$$T = 1.159 \times 10^5$$



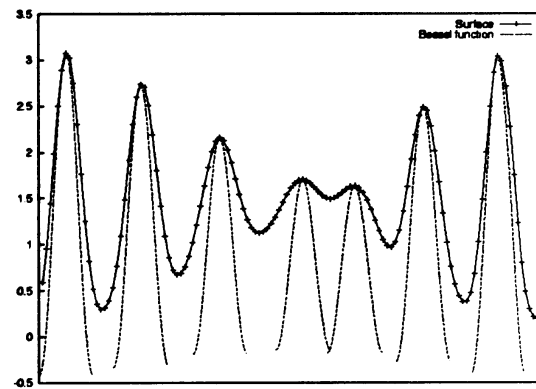
$$T = 1.214 \times 10^5$$



$$T = 1.241 \times 10^5$$



$$T = 1.324 \times 10^5$$



$$T = 1.379 \times 10^5$$

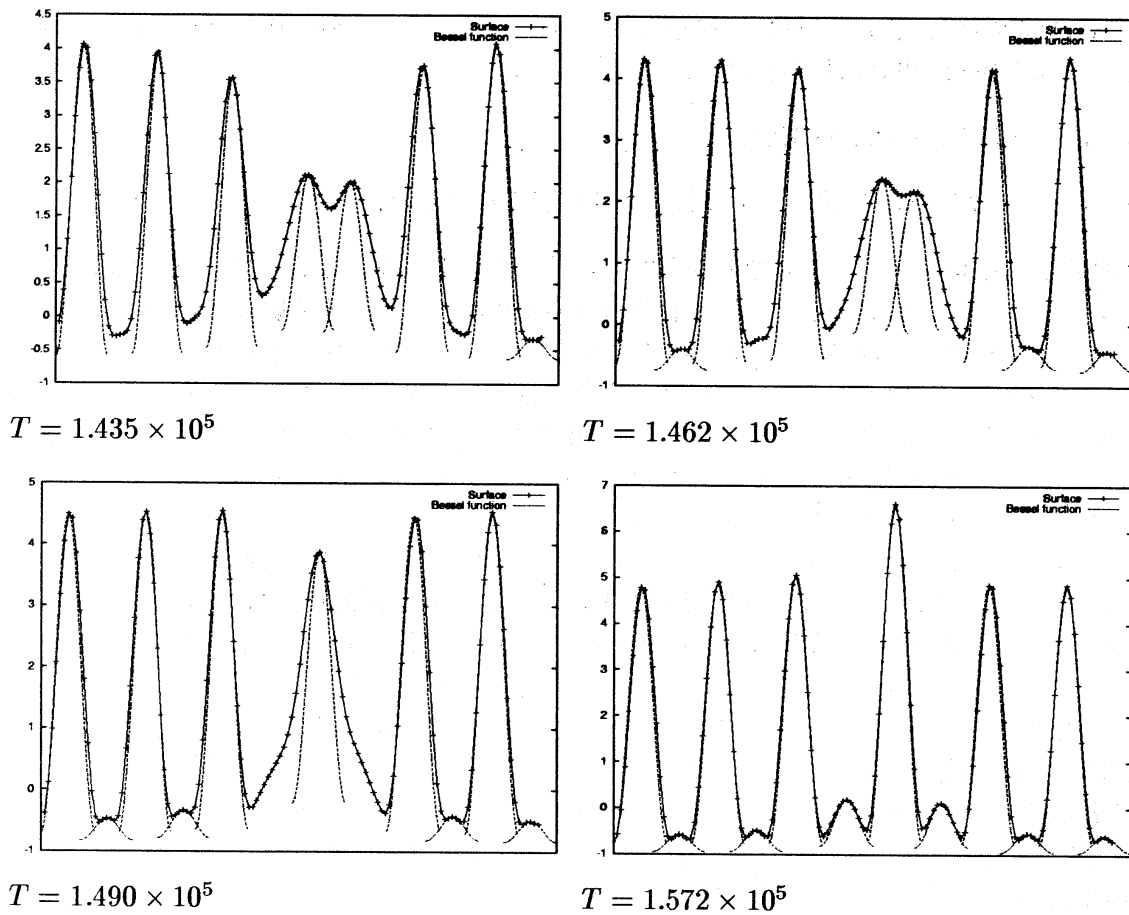


図 16: Time-evolution of the thin-fluid surface at a crossed section compared with the steady axisymmetric solution.

7 まとめと今後の課題

非常に薄いレイリー・テイラー不安定性でどのような表面変形が生じるを潤滑近似による長波長方程式を直接数値シミュレーションおよび解析をすることで調べた。主要な結果は、

- 初期条件に依らず，準定常軸対称ピークが分布した状態が実現する．ピークの大きさは初期条件に依存する．
- その分布は初期条件に依存することもあるが，総じて6回対称性パターンを持つ．その間隔は最大増幅率を与える波長よりもやや大きい．
- 最終的には破断する．そのときの体積は孤立した液滴の臨界体積よりもかなり小さい．
- 切り取られた定常軸対称解は振幅によらず局所的に安定である．
- 1次元の伸びたロール形状は常に不安定である．

- 初期の成長段階では線形増幅率にしたがって増大し、打ち切りモデルによる弱非線形増幅率は顕著に見られない。
- ピークの成長は2段階がある。
- 2つの準定常軸対称ピークの融合条件を明らかにした。

時間発展の描像は、ランダムな初期条件から最大増幅率の波長の間隔でピークの種になるものができ、それが成長とともにまわりの液体を集めていく。その際ピークが隣接している場合はピークの融合が生じその部分の体積が増大し、後に破断する液滴までに成長する可能性がある。このようにしてピークの位置の分布が大体決定されて、その位置で各々のピークが体積を保存しつつ成長していく。融合するため少しピークの間隔が大きくなる。その際、ピークの間に小さなピークが残っているところではさらにそのピークを吸収するように運動し成長しすぎて破断してしまう。

残した今後の課題としては、ロールの線形安定性が挙げられる。これは実行すれば簡単に調べることができる。より興味深いことは実験とより定量的に比較することであろう。Fermigier *et al*(1992)の実験は、興味深いパターンを実現し、(これらはシミュレーションでも再現された)破断することなど定性的に有益な情報を与えている。しかしながら、形状の定量的な測定はなされていない。これがなされれば、潤滑近似による長波長方程式の有効性がよりはっきりとする。長波長方程式は分子間力が支配的になるような現象の予測にまで使われつつある現状を考えると、われわれの扱った身近な現象においてどの程度有効であるかを詳細に検討することは価値があろう。破断する際の液体の切れ具合を実験的に明らかにし、それをモデル化することができれば、破断した後の液膜の振る舞いも明らかにすることができるであろう。

8 参考文献

- [1] A. Oron, S. H. Davis and S. G. Bankoff (1997), *Rev. Mod. Phys.* **69**, 931.
- [2] J. J. Liu, B. Schneider and J. P. Gollub (1995), *Phys. Fluids* **7**, 55.
- [3] M. Fermigier, L. Limat, J. E. Westfreid, P. Boudinet and C. Quilliet (1992), *J. Fluid Mech.* **236**, 349.
- [4] O. Lioubashevski, H. Arbell and J. Fineberg (1996), *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3959.
- [5] Y. Murakami and M. Chikano (2001), *Phys. Fluids* **13**, 65.
- [6] A. Sharma and R. Khanna (1998), *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3463.
- [7] A. Oron (2000), *Phys. Fluids* **12**, 1633.
- [8] J. A. Whitehead and D. S. Luther (1975), *J. Geophys. Res.* **80**, 705.
- [9] A. D. D. Craik (1976), *Phys. Fluids* **19**, 479.
- [10] P. S. Hammond (1983), *J. Fluid Mech.* **137**, 363.
- [11] S. G. Yiantsios and B. G. Higgins (1989), *Phys. Fluids* **A1** 1484.
- [12] A. Oron and P. Rosenau (1992), *J. Phys. (France)* **2** 131.
- [13] L. W. Schwartz (1999), *Advances in Coating and Drying of Thin Films, 3rd European Coating Symposium*, Erlangen, 105.